

MATEMATYKA DYSKRETNA - TEORIA

1. Rachunek zdań i kwantyfikatorów.

Definicja 1. **Zdaniem logicznym** nazywamy takie zdanie, które można oceniać w kategorii prawdy i fałszu.

Zdanie jest prawdziwe, gdy to co głosi występuje w rzeczywistości, a fałszywe w przeciwnym razie. Prawdę i fałsz nazywamy wartościami logicznymi.

Zdania pytające, rozkazujące, nieściśle i wieloznaczne nie są zdaniami w sensie logiki.

Zdania oznaczamy zwykle małymi literami: $p, q, r, \dots$

Przykład 1.

p = „Szczecin leży w Polsce” (zdanie prawdziwe)

q = „Szczecin jest stolicą Polski” (zdanie fałszywe)

Wartość logiczną powyższych zdań możemy zapisać krótko:

$w(p) = 1$ (w literaturze można się spotkać również z oznaczeniem: **T**)

$w(q) = 0$ (w literaturze można się spotkać również z oznaczeniami: **F**, **L**)

Język rachunku zdań:

- zmienne zdaniowe: $p, q, r, \dots$
- nawiasy: $(,)$
- symbole spójników:
 - negacja ($\sim, \neg$) (czyt. „nie”, „nieprawda że”)
 - alternatywa ($\vee$) („... lub ...”)
 - koniunkcja ($\wedge$) („... i ...”)
 - implikacja ($\Rightarrow$) („jeżeli... to...”, „jeśli... to...”)
 - równoważność ($\Leftrightarrow$) („... wtedy i tylko wtedy, gdy ...”)

Umowna kolejność wykonywania działań:

- 1) $(,)$
- 2) $\sim$
- 3) $\wedge, \vee$
- 4) $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

negacja ($\sim$):

p	$\sim p$
0	1
1	0

koniunkcja ($\wedge$):

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

alternatywa ($\vee$):

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

implikacja ($\Rightarrow$):

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

równoważność ($\Leftrightarrow$):

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Twierdzenie 101. (podstawowe prawa rachunku zdań)

A1	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	Prawo podwójnego przeczenia
A2	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Prawa przemienności
A3	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	
A4	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$	
A5	$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$	Prawa łączności
A6	$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$	
A7	$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	Prawa rozdzielności
A8	$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$	
A9	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	Prawa idempotentności (tautologii)
A10	$p \vee p \Leftrightarrow p$	
A11	$p \wedge \text{fałsz} \Leftrightarrow \text{fałsz}$	Prawa pochłaniania
A12	$p \wedge \text{prawda} \Leftrightarrow p$	
A13	$p \vee \text{fałsz} \Leftrightarrow p$	
A14	$p \vee \text{prawda} \Leftrightarrow \text{prawda}$	
A15	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	Prawo sylogizmu
A16	$(p \vee \sim p) \Leftrightarrow \text{prawda}$	Prawo wyłączonego środka
A17	$(p \wedge \sim p) \Leftrightarrow \text{fałsz}$	Prawo sprzeczności
A18	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$	Prawa de Morgana
A19	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$	
A20	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Leftrightarrow \sim p)$	Prawo kontrapozycji
A21	$p \Rightarrow (p \vee q)$	Wprowadzanie alternatywy
A22	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	Opuszczanie koniunkcji
A23	$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$	Modus ponens
A24	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$	Zamiana implikacji na alternatywę
A25	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$	Zamiana równoważności na koniunkcję dwóch implikacji

Twierdzenie 102. (podstawowe prawa rachunku kwantyfikatorów)

B1	$\sim (\forall x : p(x)) \Leftrightarrow \exists x : \sim p(x)$	I prawo de Morgana
B2	$\sim (\exists x : p(x)) \Leftrightarrow \forall x : \sim p(x)$	II prawo de Morgana
B3	$\forall x : p(x) \vee \forall x : q(x) \Rightarrow \forall x : [p(x) \vee q(x)]$	Implikacja alternatywy kwantyfikatorów ogólnych
B4	$\exists x : [p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow \exists x : p(x) \wedge \exists x : q(x)$	Implikacja rozdzielnosci kwantyfikatora szczególnego wzgledem koniunkcji
B5 B6	$\exists x \exists y : p(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x : p(x, y)$ $\forall x \forall y : p(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x : p(x, y)$	Prawa przemienności kwantyfikatorów
B7	$\exists x \forall y : p(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x : p(x, y)$	Prawo przeniesienia kwantyfikatora szczególnego za ogólny (nie odwrotnie)
B8	$\forall x : [p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x : p(x) \wedge \forall x : q(x)$	Prawo rozdzielnosci kwantyfikatora ogólnego wzgledem koniunkcji
B9	$\exists x : [p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow \exists x : p(x) \vee \exists x : q(x)$	Prawo rozdzielnosci kwantyfikatora szczególnego wzgledem alternatywy
B10	$\forall x : p(x) \Rightarrow \exists x : p(x)$	
B11	$\forall x : [p(x) \vee q] \Leftrightarrow \forall x : p(x) \vee q$	Prawa włączania i wyłączania dla kwantyfikatorów (zachodzą, jeżeli w zdaniu q nie występuje zmienna niezwiązana x)
B12	$\forall x : [p(x) \wedge q] \Leftrightarrow \forall x : p(x) \wedge q$	
B13	$\exists x : [p(x) \vee q] \Leftrightarrow \exists x : p(x) \vee q$	
B14	$\exists x : [p(x) \wedge q] \Leftrightarrow \exists x : p(x) \wedge q$	