

Matematyka dyskretna - teoria

Jan Rodziewicz-Bielewicz, Wydział Informatyki ZUT

April 6, 2019

6 Kombinatoryka

Niech A będzie w poniższych definicjach dowolnym zbiorem skończonym, $|A| = n$.

Definicja 30. **Permutacją** bez powtórzeń tworzoną z elementów tego zbioru nazywamy każdy n -wyrazowy ciąg utworzony z elementów tego zbioru (każdy element zbioru A występuje w ciągu dokładnie jeden raz). Liczba permutacji wyrażana jest wzorem:

$$P_n = n!$$

Można również rozważyć funkcję $\sigma : A \rightarrow A$, której wartością jest pewna permutacja zbioru A .

Definicja 31. **Permutacją** z powtórzeniami m -elementową tworzoną z elementów tego zbioru nazywamy każdy m -wyrazowy ciąg utworzony z elementów tego zbioru (element a_i ze zbioru A występuje w ciągu dokładnie m_i razy, $m = m_1 + \dots + m_n$). Liczba permutacji z powtórzeniami wyrażana jest wzorem:

$$P_n^{m_1, \dots, m_k} = \frac{n!}{m_1! \dots m_k!}$$

Definicja 32. **Wariacją** k -elementową bez powtórzeń tworzoną z elementów tego zbioru nazywamy każdy ciąg zawierający k elementów i oznaczamy symbolem V_n^k . Liczba wariacji bez powtórzeń wyraża się wzorem:

$$V_n^k = n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \text{ (tzw. potęga krocząca)}$$

Definicja 33. **Wariacją** k -elementową z powtórzeniami tworzoną z elementów tego zbioru nazywamy każdy ciąg zawierający k elementów ze zbioru A i oznaczamy symbolem $\overline{V}_n^k$. Liczba wariacji z powtórzeniami wyraża się wzorem:

$$\overline{V}_n^k = n^k$$

Definicja 34. **Kombinacją** k -elementową bez powtórzeń tworzoną z elementów tego zbioru nazywamy każdy podzbiór zawierający k elementów i oznaczamy symbolem C_n^k . Liczbę kombinacji wyznacza symbol dwumianowy Newtona:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Definicja 35. **Kombinacją** k -elementową z powtórzeniami tworzoną z elementów tego zbioru nazywamy każdy multizbiór (zbiór zawierający niekoniecznie różne elementy) zawierający k elementów ze zbioru A i oznaczamy symbolem $\overline{C}_n^k$. Liczbę kombinacji wyznacza symbol dwumianowy Newtona:

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Schemat wyboru k spośród n elementów		
	Z powtórzeniami	Bez powtórzeń
Kolejność istotna (ciągi)	wariacje z powtórzeniami	wariacje bez powtórzeń
Kolejność nieistotna	kombinacje z powtórzeniami	kombinacje

Twierdzenie 104. (Reguła mnożenia) Jeśli pewną czynność wykonuje się w k etapach, przy czym: etap nr 1 można wykonać na n_1 sposobów, etap nr 2 można wykonać na n_2 sposobów, ..., etap k -ty można wykonać na n_k sposobów, to liczba N sposobów, na jaki można wykonać tę czynność wynosi:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

Reguła mnożenia w odniesieniu do teorii zbiorów: Dla dowolnych zbiorów skończonych $A_1, A_2, \dots, A_k$ zachodzi równość:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|$$

Twierdzenie 105. (Reguła dodawania) Jeśli można wykonać k czynności, przy czym pierwsza daje n_1 wyników, druga n_2 wyników, ..., k -ta daje n_k wyników oraz te wszystkie wyniki są różne, to wykonanie którejkolwiek z tych czynności daje N wyników:

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

Reguła dodawania w odniesieniu do teorii zbiorów: Dla dowolnych skończonych parami rozłącznych zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_k$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) zachodzi równość:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$$

Twierdzenie 106. (Wzór włączeń i wyłączeń) Dla dowolnych dwóch skończonych zbiorów A_1, A_2 zachodzi równość:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Dla dowolnych trzech skończonych zbiorów A_1, A_2, A_3 zachodzi równość:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Ogólnie, dla dowolnych skończonych zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_k$ zachodzi równość:

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{i=1}^k |A_i| - \sum_{i,j;i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k;i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k|$$

Twierdzenie 109. (Zasada szufladkowa Dirichleta) Jeżeli włożymy m przedmiotów do n szuflad, gdzie $m > n$, to istnieje co najmniej 1 szuflada z więcej niż jednym przedmiotem.

Formalnie: Niech A i B będą zbiorami skończonymi, przy czym $|A| > |B|$. Wówczas nie istnieje funkcja różnowartościowa $f: A \rightarrow B$ na zbiór B .

Definicja 36. **Liczbą Bella** B_n dla $n \in \mathbb{N}$ nazywamy liczbę możliwych podziałów zbioru n -elementowego. Liczby Bella spełniają poniższy wzór rekurencyjny:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

References

- [1] Larisa Dobryakova, *Matematyka dyskretna*. Lulu, 2012.
- [2] Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.
- [3] W. Kryszewski, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach. Część 1*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.
- [4] http://smurf.mimuw.edu.pl/uczesie/?q=kombinatoryka_3 Dostęp: 6-04-2019.