

Matematyka dyskretna

Jan Rodziewicz-Bielewicz, Wydział Informatyki ZUT

February 26, 2020

4 Relacje

ZASTOSOWANIE: Porządek danych. Relacyjne bazy danych.

1. Dane są zbiory $X = \{-3, 0, 4\}$ i $Y = \{-2, 5\}$. Wyznaczyć relację $\rho \subseteq X \times Y$ oraz wskazać dziedzinę i przeciwdziedzinę:
 - (a) $x\rho y \Leftrightarrow x + y > 0$
 - (b) $x\rho y \Leftrightarrow x - y < 0$
 - (c) $x\rho y \Leftrightarrow x + y \leq 0$
 - (d) $x\rho y \Leftrightarrow x - y \geq 0$
 - (e) $x\rho y \Leftrightarrow x \cdot y > 0$
2. Niech $X = \{a, b, c\}$, $\rho \subset X^2$. Wyznaczyć dziedziny i przeciwdziedziny relacji. Narysować graf oraz macierz relacji. Wskazać relację odwrotną.
 - (a) $\rho = \{(a, b), (a, c), (b, a)\}$
 - (b) $\rho = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c)\}$
3. Dla zbioru $X = \{1, 2, 3\}$ podać przykład relacji:
 - (a) zwrotnej,
 - (b) symetrycznej,
 - (c) przechodniej.
4. ★ Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Które z własności posiada relacja ρ , jeżeli:
 - (a) $\rho = \emptyset$
 - (b) $\rho = X^2$
5. Zbadać własności relacji $\rho \subseteq X^2$, gdzie $X = \{a, b, c, d\}$. Narysować graf i macierz relacji, wyznaczyć zwrotne i tranzytywne domknięcie oraz relację odwrotną.
 - (a) $\rho = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$. Jak będzie w zbiorze $Y = \{a, b\}$?
 - (b) $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}$
 - (c) $\rho = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, c), (a, a), (b, b)\}$. Jak będzie w zbiorze $Y = \{a, b, c\}$?
6. Zbadać, czy relacja jest relacją równoważności, narysować relację oraz wyznaczyć relację odwrotną:
 - (a) $\rho \subset \mathbb{R}^2, x\rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$
 - (b) $\rho \subset \mathbb{R}^2, x\rho y \Leftrightarrow x^2 = y^3$
 - (c) $\rho \subset \mathbb{R}^2, x\rho y \Leftrightarrow x^2 = |y|$
 - (d) $\rho \subset \mathbb{R}^2, x\rho y \Leftrightarrow x < y$
 - (e) $\rho \subset \mathbb{R}^2, x\rho y \Leftrightarrow x - y < 3$
 - (f) $\rho \subset \mathbb{R}^2, x\rho y \Leftrightarrow y = x^2$

7. Zbadać, czy relacja ρ określona na zbiorze X^2 jest relacją równoważności. Jeśli jest, wyznaczyć jej klasy abstrakcji, w przeciwnym przypadku wyznaczyć relację odwrotną.

- | | |
|--|--|
| (a) $X = \{-2, -1, 0, 1\}, x\rho y \Leftrightarrow x - y \neq -3$ | (k) $X = \mathbb{C}, x\rho y \Leftrightarrow \operatorname{Re} x = \operatorname{Im} y$ |
| (b) $X = \mathbb{R}, x\rho y \Leftrightarrow x^2 \neq y^2$ | (l) $X = \mathbb{C}, x\rho y \Leftrightarrow \operatorname{Re} x = \operatorname{Re} y$ |
| (c) $X = \mathbb{N}, x\rho y \Leftrightarrow xy = 4$ | (m) $X = \mathbb{C}, x\rho y \Leftrightarrow x = y $ |
| (d) $X = \mathbb{R}, x\rho y \Leftrightarrow xy > 0$ | (n) $X = M_2(\mathbb{R}), A\rho B \Leftrightarrow \det A = \det B$ |
| (e) $X = \mathbb{R}, x\rho y \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 > 4$ | (o) $X = M_2(\mathbb{R}), A\rho B \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{R}} A - B = kI$ |
| (f) $X = \mathbb{R}, x\rho y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ | |
| (g) $X = \mathbb{R}, x\rho y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}_0$ | |
| (h) $X = \mathbb{R}^+, x\rho y \Leftrightarrow [x] = [y]$ | |
| (i) $X = \mathbb{R}, x\rho y \Leftrightarrow x = y $ | |
| (j) $X = \mathbb{R}, x\rho y \Leftrightarrow 3 \leq x - y \leq 6$ | |

8. Sprawdzić, czy następujące zdanie jest prawdziwe: "Część wspólna dwu relacji przechodnich jest przechodnia".

9. Udowodnić, że na to by relacja ρ była symetryczna potrzeba i wystarcza, by $\rho \subseteq \rho^{-1}$.

10. Zbadać, czy ρ jest relacją równoważności. Jeśli tak, wyznaczyć klasy abstrakcji.

$$\rho \subseteq \mathbb{N}^4, (x_1, x_2)\rho(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_2 = y_1 + x_2.$$

11. Sprawdzić, czy $\rho \subset X^2$ jest relacją liniowego porządku:

- $X = \mathbb{R}, x\rho y \Leftrightarrow x < y \vee y < x$
- $X = \mathbb{R}, x\rho y \Leftrightarrow x \leq y$
- $X = \mathbb{R}, x\rho y \Leftrightarrow |x| \leq |y|$
- $X = \mathbb{R}, x\rho y \Leftrightarrow x \leq 2y$
- $X = \mathbb{C}, (a + bi)\rho(c + di) \Leftrightarrow [b < d \vee (b = a \wedge a \leq c)]$

12. ☠ Niech X będzie zbiorem, a $P(X)$ rodziną wszystkich podzbiorów zbioru X . Udowodnić, że relacja inkluzji częściowo porządkuje zbiór $P(X)$.

References

- [1] Larisa Dobryakova, *Matematyka dyskretna*. Lulu, 2012.
- [2] Helena Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1973.
- [3] Wiktor Marek, Janusz Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1972.
- [4] Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.