

Matematyka dyskretna

Jan Rodziewicz-Bielewicz, Wydział Informatyki ZUT

March 10, 2021

1 Rachunek zdań i kwantyfikatorów.

ZASTOSOWANIE: Podstawa matematyki. Formułowanie warunków logicznych.

1. ★ Ustalić, czy podana wypowiedź jest zdaniem logicznym. Jeżeli tak, ocenić jaka jest wartość logiczna tego zdania.
 - (a) $1+4=6$.
 - (b) Świat jest piękny.
 - (c) Ucz się matematyki!
 - (d) 3 jest liczba nieparzystą.
 - (e) Sprawdzić, czy liczba $\sqrt{3}$ jest mniejsza od 1.
 - (f) Suma dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą.
 - (g) $2+1<9$.
 - (h) Proste a i b są równoległe.
 - (i) Wieloryb jest rybą.
2. Dane są zdania:
 - p - Niebo jest ciemne.
 - q - Teraz jest wieczór.
 - r - Zbiera się na burzę.

Zapisać przy użyciu powyższych oznaczeń i spójników logicznych zdania:

- (a) Niebo jest ciemne i teraz nie jest wieczór.
- (b) Jeśli niebo jest ciemne, to teraz jest wieczór lub zbiera się na burzę.
- (c) Niebo nie jest ciemne wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest wieczór i nie zbiera się na burzę.

3. ★ Dane są zdania:

- p - Teoria Freuda ma prawo do miana nauki.
- q - Teoria Freuda może być potwierdzona przez eksperymenty.
- r - Teoria Freuda może być obalona przez eksperymenty.

Odczytać zdania z użyciem symboli logicznych:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| (a) $p \vee q$ | (d) $(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$ |
| (b) $q \vee \sim r$ | (e) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ |
| (c) $\sim r \Rightarrow (p \wedge q)$ | |

4. Dobrać wartości logiczne zdań p i q tak, aby zdanie $(p \Rightarrow \sim q) \wedge \sim r$ było prawdziwe.

5. Używając symboli przyjętych w rachunku zdań, zapisać następujące zdania:

- (a) Student się uczy i zdaje egzaminy.
- (b) Asia i Piotr studiuja.
- (c) Jesteś inteligentny i nieprawda, że masz złą pamięć.
- (d) Jeśli Ziemia jest okrągła, to z faktu, że ziemia jest płaska, wynika, że ziemia jest gwiazdą.
- (e) To, że student się nie uczy i ściąga na kolokwiach jest równoważne temu, że nieprawdą jest, że (się uczy lub nie ściąga na kolokwiach).
- (f) Nie jest prawdą, że jeżeli Einstein był genialny, to Newton był ograniczony.
- (g) Przeczytam kilka podręczników logiki lub wysłucham wykładów i rozwiąże kilkadziesiąt zadań.
- (h) Nie jest prawdą, że jeśli Platon założył Akademię, to z faktu, że Arystoteles był uczniem Platona wynika, że Arystoteles nie uczęszczał do Akademii.
- (i) Skoro Ziemia obraca się wokół Słońca, to jeśli Ziemia nie obraca się wokół Słońca, to dostanę 5 na egzaminie.
- (j) Jeżeli nieprawda, że twierdzenia matematyki mogą okazać się fałszywe, to nieprawdą, że twierdzenia logiki mogą okazać się fałszywe.
- (k) Nie posiadasz gruntownej wiedzy o języku, jeśli słabo znasz gramatykę i nigdy nie uczyłeś się logiki.

6. ★ Określić wartości logiczne następujących zdań złożonych:

- (a) Jeśli 4 jest liczbą dodatnią, to 5 jest liczbą ujemną.
- (b) Jeśli 4 jest liczbą dodatnią, to 5 jest liczbą dodatnią
- (c) Jeśli 4 jest liczbą ujemną, to 5 jest liczbą ujemną.
- (d) Jeśli 4 jest liczbą ujemną, to 5 jest liczbą dodatnią.
- (e) $2 > 5$ lub $2 < 5$.
- (f) Romb jest kwadratem lub romb jest czworokątem.
- (g) $3 < 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy Ziemia jest planetą.

7. Zapisać zaprzeczenie podanych niżej zdań:

- (a) Liczba naturalna n jest mniejsza od 5 i jest liczbą parzystą.
- (b) $a \geq b$ lub $c \leq a$.
- (c) Funkcja $f(x)$ jest ciągła i różniczkowalna.
- (d) Trójkąt jest prostokątny znaczy to samo co "trójkąt spełnia twierdzenie Pitagorasa".
- (e) Jeśli liczba kończy się cyfrą parzystą, to liczba jest parzysta.
- (f) Jeśli Ala nie ma kota, to Ala ma psa.
- (g) Jeśli $a = b$, to a dzieli się przez b i b dzieli się przez a .
- (h) Jeśli liczba dzieli się przez 4, to dzieli się przez 2.

8. Podać zdania odwrotne i kontrapozycję dla następujących zdań:

- (a) Jeśli $2 + 2 = 5$, to $4 + 6 = 9$.
- (b) $(p \wedge q) \Rightarrow r$.
- (c) Jeśli $x + y = 1$, to $x^2 + y^2 \geq 1$.
- (d) Jeśli $x > a$ i $x < -a$, to $|x| > a$.
- (e) Jeśli $x^2 = x$, to $x = 0$ lub $x = 1$.

9. Dane są zdania:

- p - w logice 1 oznacza fałsz.
- q - liczba 25 dzieli się przez 5.
- r - $86 - 80 = 16$.

Wyznaczyć wartość logiczną zdania złożonego:

- | | |
|--------------------------------|--|
| (a) $(\sim p \wedge q) \vee r$ | (g) $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ |
| (b) $(\sim p \vee q) \wedge r$ | (h) $\sim p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ |
| (c) $\sim (p \wedge q) \vee r$ | (i) $\sim p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ |
| (d) $\sim (p \vee q) \wedge r$ | (j) $[(p \Rightarrow r) \vee \sim q] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (r \wedge \sim q)]$ |
| (e) $\sim p \vee (q \wedge r)$ | (k) $[(p \Leftrightarrow r) \vee \sim p] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (r \vee q)]$ |
| (f) $\sim p \wedge (q \vee r)$ | |

10. ★ Jaką wartość logiczną posiada zdanie oznaczone literą a jeśli jest prawdą, że:

- (a) a tworzy fałszywą koniunkcję z dowolnym zdaniem.
- (b) a tworzy fałszywą koniunkcję tylko z niektórymi zdaniem.
- (c) a tworzy prawdziwą koniunkcję z niektórymi zdaniem.
- (d) a tworzy prawdziwą koniunkcję z dowolnym zdaniem.
- (e) a tworzy prawdziwą alternatywę z dowolnym zdaniem.
- (f) a tworzy prawdziwą alternatywę tylko z niektórymi zdaniem.
- (g) a tworzy fałszywą alternatywę z niektórymi zdaniem.
- (h) Implikacja, której pierwszym członem (poprzednikiem) jest a jest zawsze prawdziwa.
- (i) Implikacja, której drugim członem (następnikiem) jest a jest zawsze prawdziwa.

11. Udowodnić, że jeżeli zdanie p jest fałszywe, to dla każdego zdania q mamy:

- (a) $p \vee q$ równoważne jest q .
- (b) $p \wedge q$ równoważne jest p .

12. Udowodnić, że jeżeli zdanie p jest prawdziwe, to dla każdego zdania q mamy:

- (a) $p \wedge q$ równoważne jest q .
- (b) $p \vee q$ równoważne jest p .

13. Wykazać wykorzystując tabelę zero-jedynkową, że następująca formuła jest tautologią:

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q.$$

14. Wykazać, nie wykorzystując tabeli zero-jedynkowej, że następujące wyrażenia są tautologiami:

- | | |
|---|--|
| (a) $p \Rightarrow (p \vee q)$ | (f) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$ |
| (b) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ | (g) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ |
| (c) $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ | (h) $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ |
| (d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ | (i) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$ |
| (e) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$ | |

15. Sprawdzić, nie wykorzystując tabeli zero-jedynkowej, czy następujące wyrażenia są tautologiami:

- | | |
|---|---|
| (a) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$ | (e) $[(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ |
| (b) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ | (f) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \vee r)]$ |
| (c) $p \Rightarrow (\sim p \vee q)$ | (g) $\sim [p \wedge (\sim p \wedge q)]$ |
| (d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$ | |

16. Oceń wartość logiczną następujących zdań oraz zapisać ich zaprzeczenia.

(a) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \sin x = \frac{1}{2}$

(e) $\forall_{x \in \mathbb{R}} -4x \leq 0$

(b) $\exists_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{x} = -2$

(f) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} x^2 + n \geq 1$

(c) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{x^2} = |x|$

(g) $\exists_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} x^2 + y < 0$

(d) $\exists_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{x^2} = x$

(h) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} (x < 2y \vee y < 2x)$

References

- [1] Larisa Dobryakova, *Matematyka dyskretna*. Lulu, 2012.
- [2] Helena Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1973.
- [3] Wiktor Marek, Janusz Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1972.
- [4] Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.