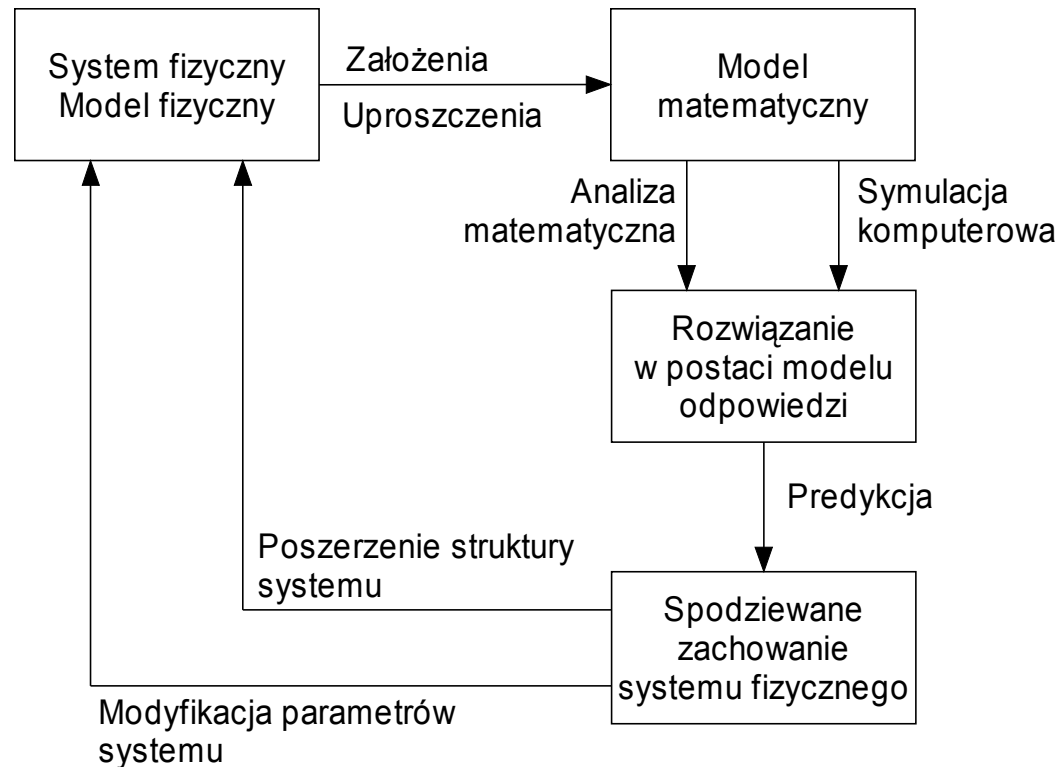
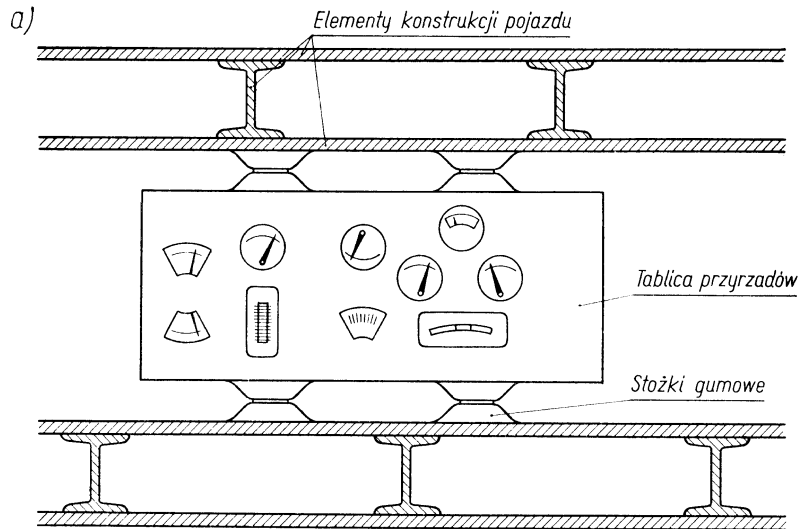


Procedura modelowania matematycznego



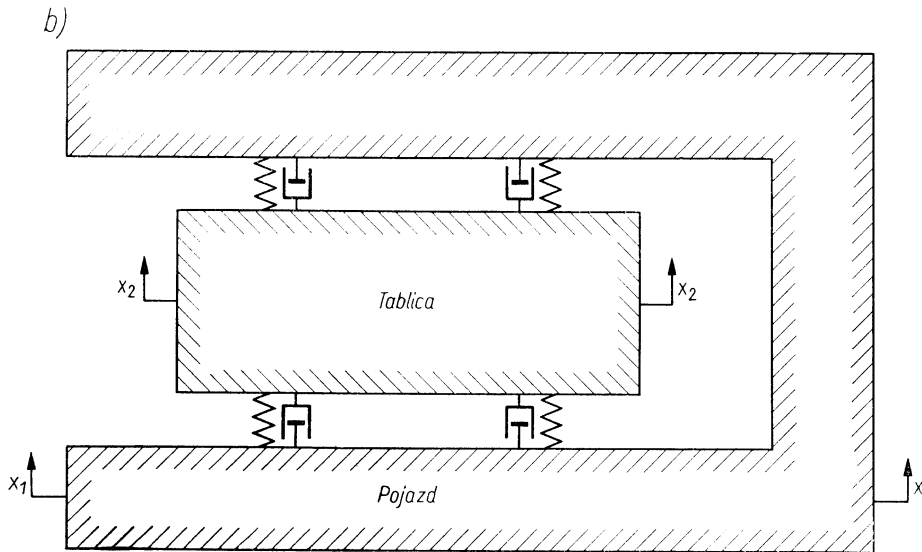
- Pomijanie małych wpływów → Zmniejsza liczbę i złożoność równań różniczkowych
- Założenie, że otoczenie jest niezależne od układu → jak wyżej
- Zastąpienie parametrów rozłożonych przez parametry skupione → Prowadzi do równań różniczkowych zwyczajnych, a nie do cząstkowych
- Przyjęcie zależności liniowych → Prowadzi do równań różniczkowych o stałych współczynnikach
- Pomijanie niezdeterminowanych zakłóceń, niepewnych parametrów i szumów → Usuwa konieczność traktowania statystycznego

Układ tłumiący drgania i jego model

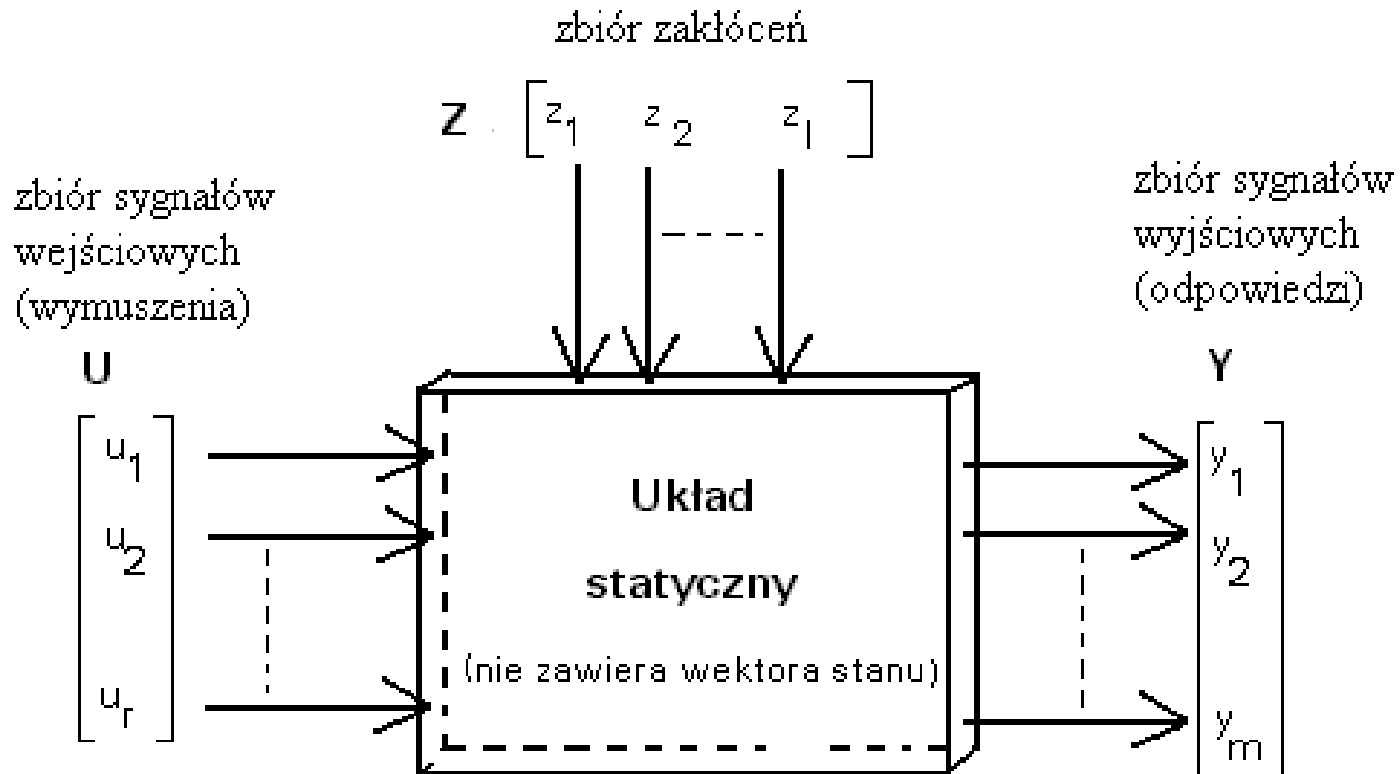


Założenia i uproszczenia :

- elementy konstrukcji -> element doskonale sztywny
- tablica przyrządów -> element doskonale sztywny
- stożki gumowe -> sprężyny o charakterystyce liniowej z tłumikami tłokowymi o tarciu lepkim
- uwzględnienie ruchów tylko w jednym kierunku
- pominięcie oddziaływania tablicy na elementy konstrukcji

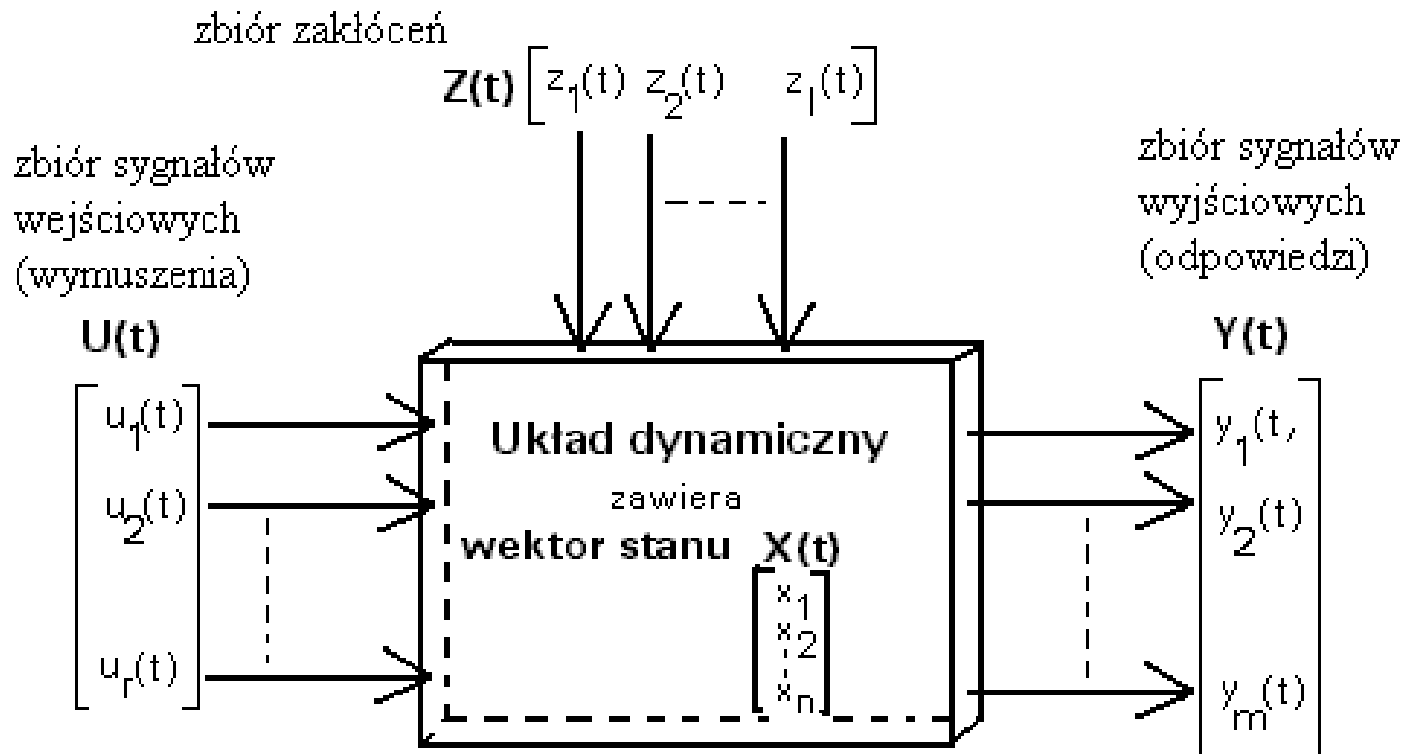


Model układu statycznego



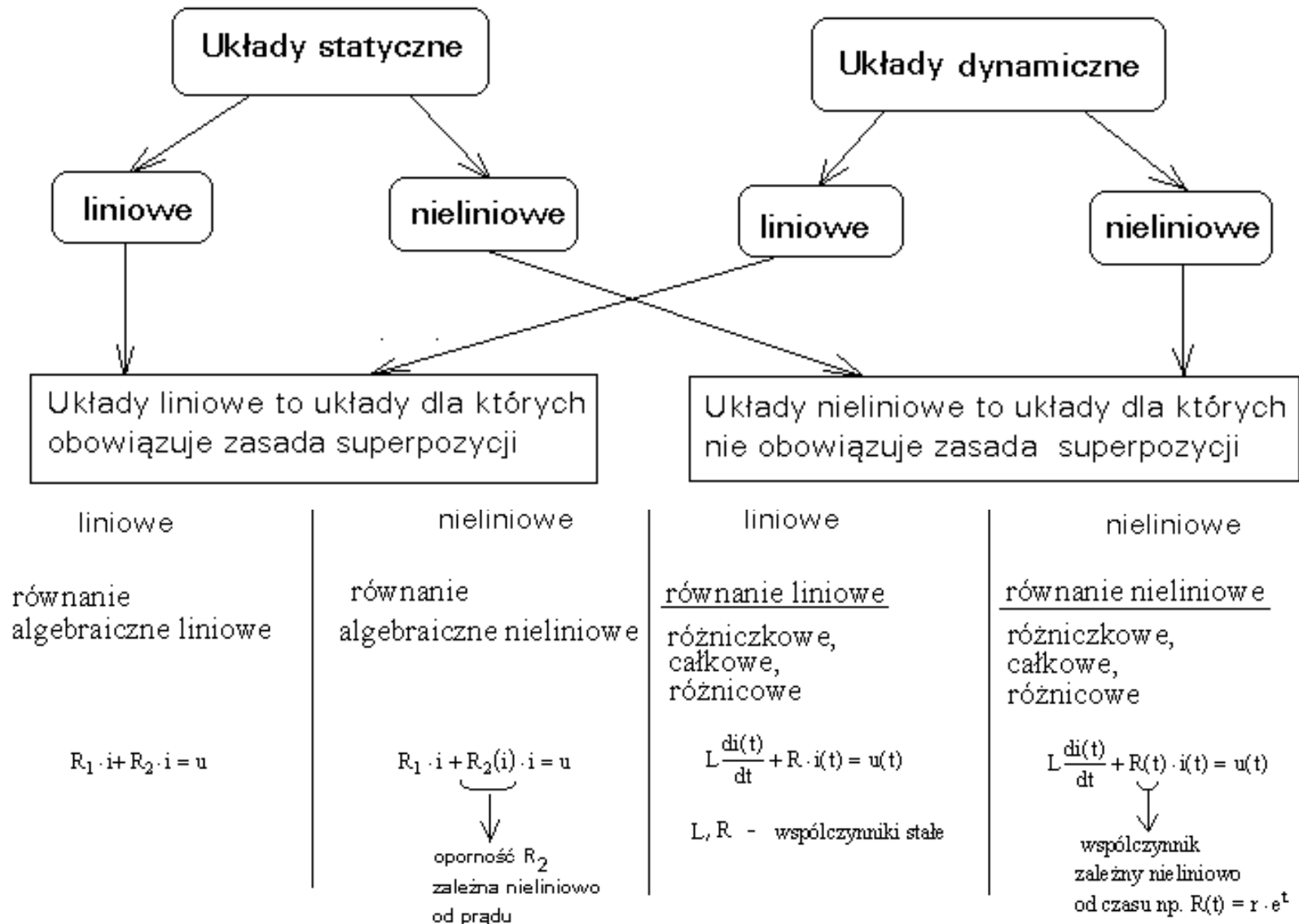
- Między wyjściami a wejściami obowiązuje zależność funkcyjna bez czasu: $Y=F(U, Z)$
- Charakterystyka statyczna jednoznacznie opisuje układ statyczny,
- Układ statyczny nie ma zmiennych stanu,
- Układy statyczne to układy rozpraszające energię.

Model układu dynamicznego



- Przebiegi sygnałów układu dynamicznego w czasie zależą nie tylko od aktualnych wartości wymuszeń, ale zależą także od wymuszeń, które były w przeszłości,
- Aby układ był układem dynamicznym musi zawierać co najmniej jedną zmienną stanu,
- Niekiedy do opisu układu dynamicznego wystarczą opisy wejść i wyjść bez jawnego wprowadzenia zmiennych stanu,
- Przechowują energię.

Klasyfikacja modeli deterministycznych



Formy przedstawiania własności dynamicznych

WŁASNOŚCI DYNAMICZNE OBIEKTU STEROWANIA
MOGĄ BYĆ OKREŚLONE NA PODSTAWIE :

RÓWNAŃ :

- RÓŻNICZKOWYCH
- RÓŻNICOWYCH

**TRANSMITANCJI
OPERATOROWYCH :**

- W DZIEDZINIE "S"
- W DZIEDZINIE "Z"

**CHARAKTERYSTYK
DYNAMICZNYCH:**

**CHARAKTERYSTYKI
CZASOWE :**

- IMPULSOWE
- SKOKOWE
- CZASOWO-LINIOWE

**CHARAKTERYSTYKI
CZĘSTOTLIWOŚCIOWE :**

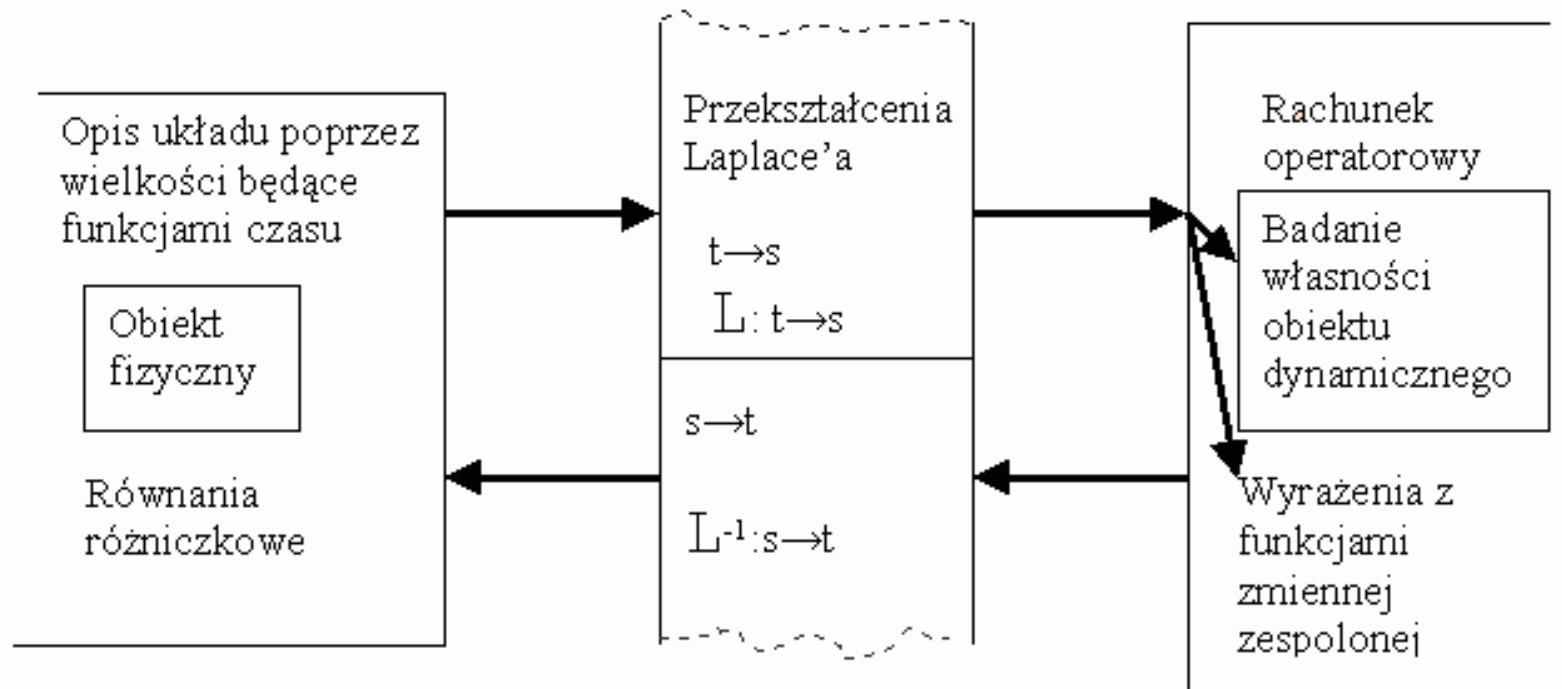
- AMPLITUDOWO-FAZOWE
- AMPLITUDOWE
- FAZOWE
- LOGARYTMICZNE AMPLITUDOWE
- LOGARYTMICZNE FAZOWE

**CHARAKTERYSTYK
STATYCZNYCH**
(W STANACH USTALONYCH)

Zastosowanie rachunku operatorowego

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$



Pojęcie transmitancji operatorowej

Układ dynamiczny
jednowymiarowy (o jednym wejściu $u(t)$ i jednym wyjściu $y(t)$)
liniowy,
ciągły
stacjonarny,
o stałych skupionych, zerowe warunki początkowe

← ZAŁOŻENIA

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= \\ &= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned}$$

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, b_m, b_{m-1}, \dots, b_1$ - parametry stałe

← POSTAĆ WYJŚCIOWA
RÓWNANIA
RÓŻNICZKOWEGO

$$\begin{aligned} a_n s^n y(s) + a_{n-1} s^{n-1} y(s) + \dots + a_1 s y(s) + a_0 y(s) &= \\ &= b_m s^m u(s) + b_{m-1} s^{m-1} u(s) + \dots + b_1 s u(s) + b_0 u(s) \end{aligned}$$

← ZAPIS OPERATOROWY

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]} = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

← POSTAĆ KOŃCOWA



Komentarze do pojęcia transmitancji operatorowej

- Transmitancja operatorowa jest modelem matematycznym, który stanowi formę wyrażania równań różniczkowych zwyczajnych i określa zależność między sygnałem pobudzającym i reakcją – model wejściowo – wyjściowy
- Transmitancja wyraża własność systemu dynamicznego niezależną od amplitudy, częstotliwości i natury fizycznej sygnału.
- Transmitancja zawiera jednostki niezbędne do opisu zależności wejście/wyjście, jakkolwiek nie dostarcza informacji, dotyczących fizycznej struktury systemu – transmitancje wielu odmiennych systemów (mechanicznych, elektrycznych itp.) mogą być identyczne.
- Jeżeli transmitancja systemu jest znana, to przebieg sygnału wyjściowego może być badany dla różnych typów sygnałów pobudzających.
- Jeżeli transmitancja systemu jest nieznana, to może być eksperymentalnie ustalona poprzez wprowadzenie typowego sygnału pobudzającego i analizę uzyskanej odpowiedzi – identyfikacja doświadczalna.

Podstawowe twierdzenia rachunku Laplace'a

1. Twierdzenie o liniowości (transformata sumy (różnicy) funkcji - jest równa sumie (różnicy) transformat).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= a_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(t)] = \\ &= a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)\end{aligned}$$

2. Twierdzenie o różniczkowaniu (transformata pochodnej funkcji)

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \mathcal{L}[f(t)] - f(0) = sF(s) - f_0$$

3. Twierdzenie o całkowaniu (transformata całki)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} F(s)$$

4. Twierdzenie o wartości początkowej - jeśli istnieje granica funkcji $f(t)$ dla $t \rightarrow 0+$, to wartość początkowa wyraża się zależnością:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}[f(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

5. Twierdzenie o wartości końcowej - jeśli istnieje granica funkcji $f(t)$ dla $t \rightarrow \infty$, to wartość końcowa wyraża się zależnością:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L}[f(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

6. Transformata funkcji z przesunięciem w czasie (np. opóźnienie o wielkość T)

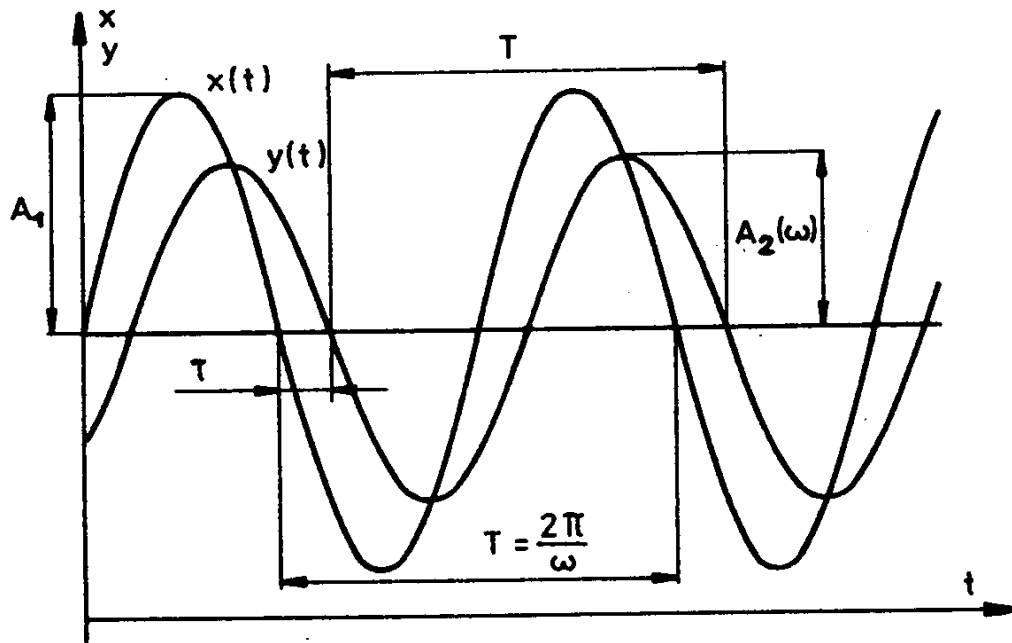
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-T) \cdot 1(t-T)] &= e^{-Ts} \cdot \mathcal{L}[f(t) \cdot 1(t)] = \\ &= e^{-Ts} F(s)\end{aligned}$$

7. Transformata funkcji z przesunięciem względem s

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$$



Sporządzanie charakterystyk częstotliwościowych



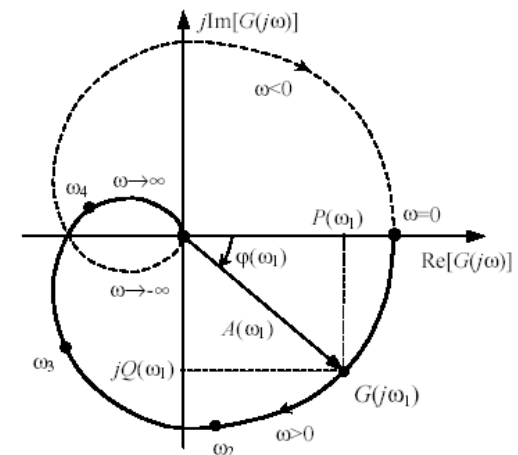
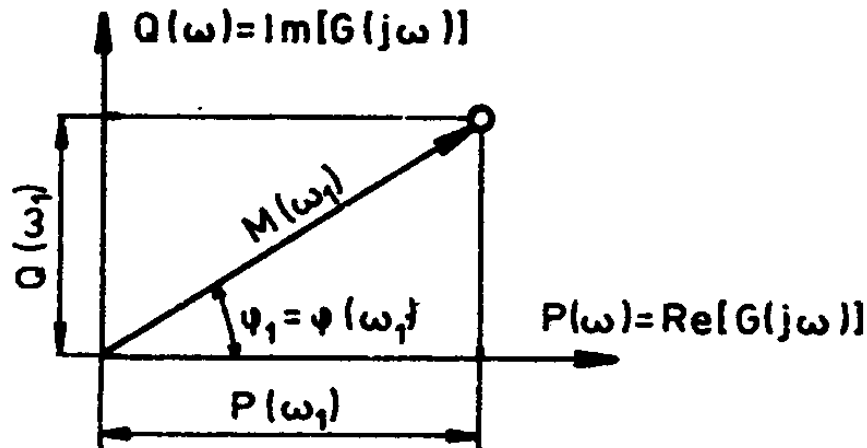
$$x(t) = A_1 \sin \omega t$$

$$y(t) = A_2(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

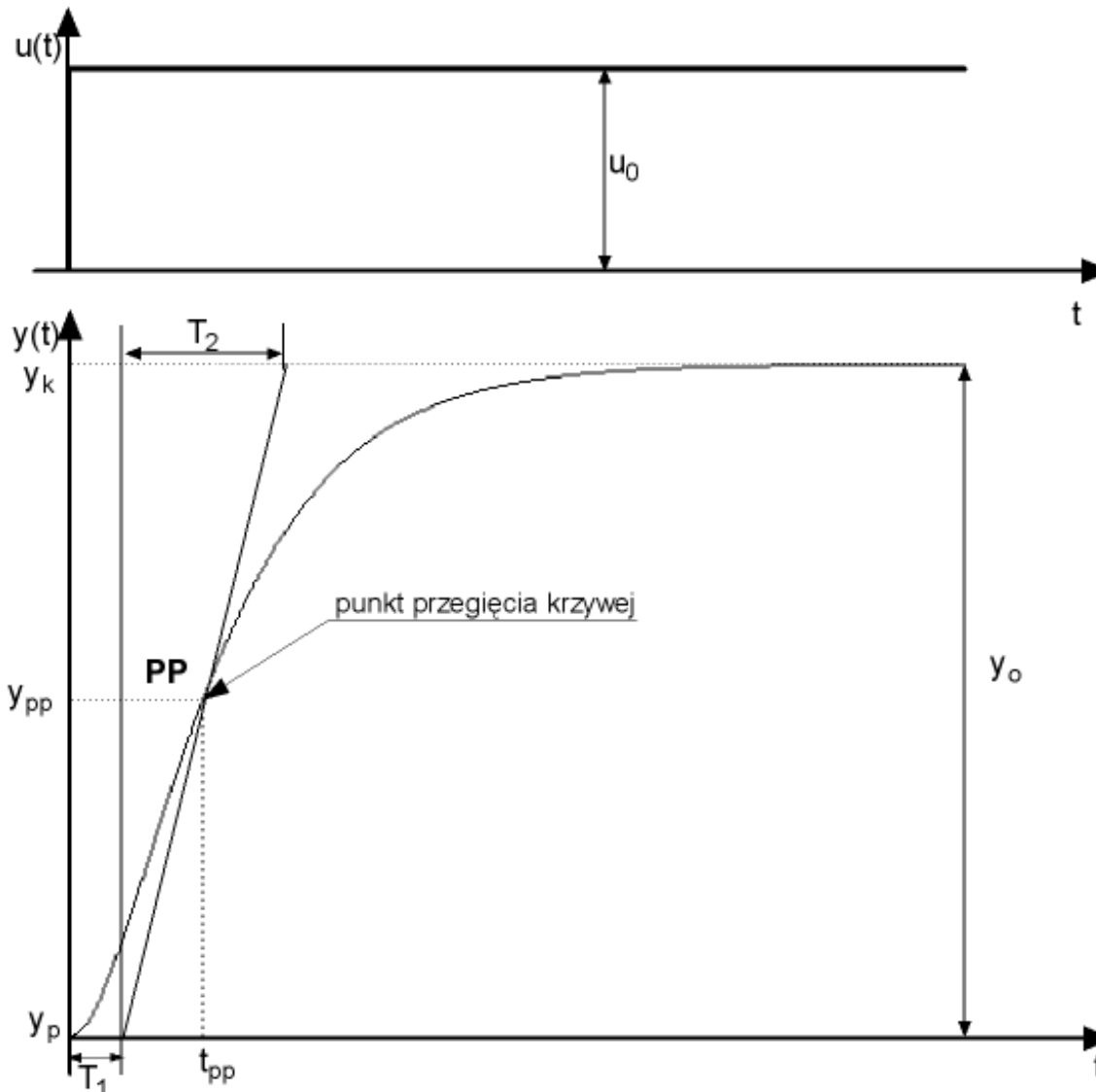
$$M(\omega) = \frac{A_2(\omega)}{A_1(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \frac{2\pi\tau}{T} \quad [\text{rad}] \vee [\text{deg}]$$

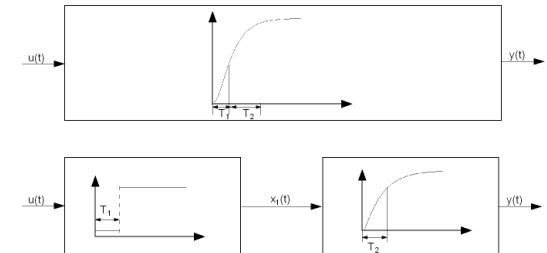
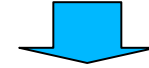
$$L_m(\omega) = 20 \log(M(\omega)) \quad [\text{dB}]$$



Modelowanie „Black Box” - obiekty z wyrównaniem



Model Kùpfmùllera



$$G(s) = \frac{k}{T_2 s + 1} \cdot e^{-T_1 s}$$
$$= G_1(s) G_2(s)$$

T_1 - zastępcze
opóźnie n ie obiektu

T_2 - zastępcza stała

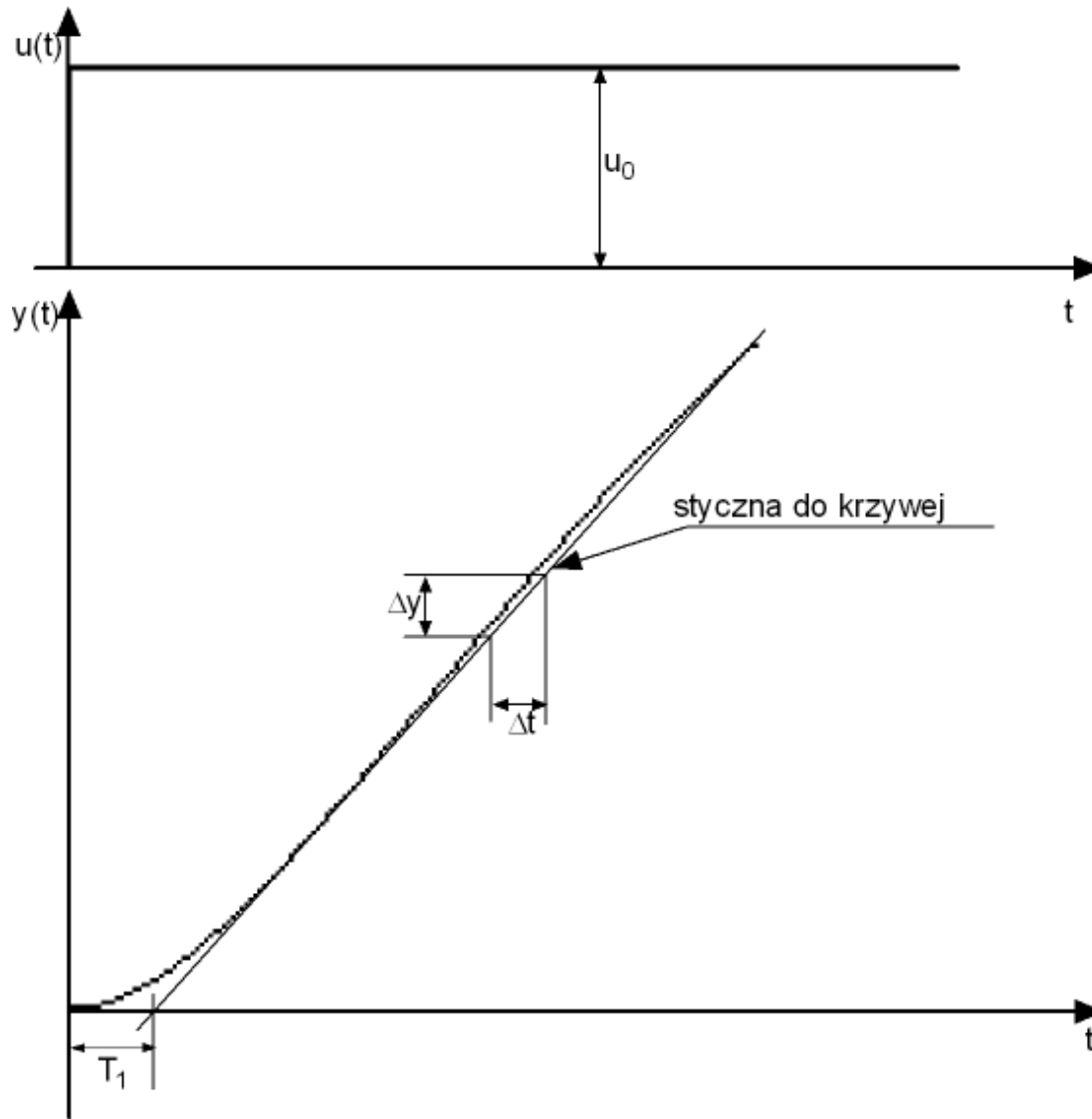
czasowa z obiektu

$$k = y_o / u_o$$

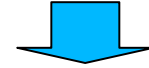
-współczynnik
wzmocnienia obiektu



Modelowanie „Black Box” - obiekty bez wyrównania



Model zastępcze



$$G(s) = \frac{1}{T_c s} \cdot e^{-T_1 s}$$

$$G(s) = \frac{1}{T_c s} \cdot \frac{1}{T_1 s + 1}$$

T_1 - zastępcze
opóźnienie obiektu
lub zastępcza stała
czasowa z obiektu

$$T_c = \frac{\Delta y}{\Delta t \cdot u_0}$$

- stała czasowa
całkowania