

Matematyka dyskretna

Jan Rodziewicz-Bielewicz, Wydział Informatyki ZUT

March 15, 2021

3 Teoria zbiorów

ZASTOSOWANIE: Struktury danych. Wstęp do relacji.

1. ★ Czy zbiory $A = \emptyset$ i $B = \{\emptyset\}$ są równe? Odpowiedź uzasadnić.
2. ★ Czy prawdą jest, że $\{\{a, b\}, \{b, c\}\} = \{a, b, c\}$?
3. ★ Dany jest zbiór $A = \{a, b, c, \{a, b\}, \{a\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c\}\}$
 - (a) Które elementy tego zbioru są zbiorami?
 - (b) Które z następujących wyrażeń mają sens:
 - i. $a \in A$
 - ii. $a \subset A$
 - iii. $\{a\} \in A$
 - iv. $\{a\} \subset A$
 - v. $\{a, b, c, d\} \in A$
 - vi. $\{a, b, c, d\} \subset A$
4. ★ Która z następujących równości jest prawdziwa, a która fałszywa dla dowolnego zbioru A ?
 - (a) $A \cup \emptyset = A$
 - (b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
 - (c) $A \cup \emptyset = \emptyset$
 - (d) $A \cap \emptyset = A$
 - (e) $A \cup A^C = \emptyset$
 - (f) $A \setminus A = \emptyset$
5. ★ Wyznaczyć elementy następujących zbiorów:
 - (a) $\{x \in \mathbb{N} : |5 - x| \leq 1\}$
 - (b) $\{x \in \mathbb{N} : x \leq 0\}$
 - (c) $\{x \in \mathbb{N} : x = 4 \vee x = 7\}$
 - (d) $\{\{a, b, c\}\}$
 - (e) $\{\{1, 2\}, \{\{1, 2\}\}, \emptyset\}$
 - (f) $\{\{1, 2\}, \{\{1, 2\}\}, \{\emptyset\}\}$
6. ★ Określić moc zbioru:
 - (a) $\{x \in \mathbb{N} : x < 4\}$
 - (b) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 < 4\}$
 - (c) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4\}$
 - (d) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 8\}$
 - (e) $\{x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c = 0\}$
 - (f) $\{x \in \mathbb{R} : a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0\}$
 - (g) $\{x \in \mathbb{C} : a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0\}$
 - (h) $\emptyset$
 - (i) $\{\emptyset\}$
 - (j) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 - (k) $\{\emptyset, \emptyset, \{\emptyset\}\}$
7. Znaleźć warunek charakteryzujący elementy zbiorów i zapisać je w skróconej formie (bez wymieniaania wszystkich elementów):
 - (a) $A = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$
 - (b) $B = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$

8. ★ Wyznaczyć zbiory:
- $\mathbb{N} \cap (4, 7]$
 - $\mathbb{N} \cap (-4, 7]$
 - $\mathbb{Z} \cap (-4, 7]$
 - $\mathbb{N} \setminus (-2, 4)$
 - $[5, 6] \setminus \mathbb{N}$
9. Dana jest przestrzeń U (uniwersum) oraz zbiory A i B . Wyznaczyć A^C i B^C .
- $U = \mathbb{N}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B$ - zbiór liczb naturalnych większych od 6.
 - $U = \mathbb{Z}, A = \mathbb{N}, B$ - zbiór liczb całkowitych mniejszych od 5.
 - U - zbiór potęg liczby 2 o wykładniku całkowitym nieujemnym, A - zbiór potęg liczby 2 o wykładniku nieparzystym, $B = \{1, 2, 4, 8\}$.
10. Dane są zbiory A i B . Znaleźć $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$:
- $A = \{0, 3, 6, 8\}, B = \{3, 5, 8, 9\}$
 - $A = (-1, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}, B = \{x \in \mathbb{Z} : -\pi \leq x < \sqrt{20}\}$
11. ★ Niech x, y, z, f są różne od zbioru pustego. Jakie zależności muszą zachodzić pomiędzy nimi, żeby zachodziły równości:
- $\{y, z\} = \{y, z, f\},$
 - $\{x, y, x, x\} = \{y, x\},$
 - $\{\{x, y\}, z\} = \{\{x\}, z\},$
 - $\{\{y, f\}, z\} = \{\{y, x\}\},$
 - $\{\{x, \emptyset\}, z\} = \{\{\emptyset\}\}.$
12. Wyznaczyć zbiór $P(A)$ dla zbioru $A = \{1, 2, 3\}$.
13. ★ Jakie relacje inkluzji zachodzą między zbiorami A i B ?
- $A = \{\{a\}, a, 0\}, B = \{a\}$
 - $A = \{a, b\}, B = \{a, c, d\}$
 - $A = \{x \in \mathbb{N} : x > 2\}, B = \{y \in \mathbb{N} : y > 2\}$
 - $A = \{ax + b : a, b, x \in \mathbb{R}\}, B = \{x + y : x, y \in \mathbb{R}\}$
 - $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 > 4\}, B = \{y \in \mathbb{N} : y > 2\}$
 - $A = \{\{a, b\}, a, b, \emptyset\}, B = \{\{a\}, b, \{\emptyset\}\}$
 - $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, B = \{y \in \mathbb{N} : y > 0\}$
 - $A = \{\{a, b\}, \{c, d\}, c, d\}, B = \{\{a, b\}, c\}$
14. Czy następujące inkluzje zachodzą dla dowolnych zbiorów A i B ?
- $(A \cap A) \subseteq A$
 - $(A \setminus B) \subseteq (A \cap B)$
 - $(A \cap B) \subseteq A$
15. Udowodnić prawa rachunku zbiorów:
- $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
 - $(A \cup B) \setminus A = B \setminus (A \cap B)$
 - $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$
 - $(A \cap B)^C = (A^C \cup B^C)$
 - $(A \cup B)^C = (A^C \cap B^C)$
 - $A \cup (A \cap B) = A$
 - $A \cap (A \cup B) = A$

16. Udowodnić:

- (a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
- (b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$
- (c) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$
- (d) $A \dot{-} B = \emptyset \Rightarrow A = B$
- (e) $A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$

17. Dowieść, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzą następujące implikacje bądź równoważności:

- (a) $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C \subseteq B \cap D)$
- (b) $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \Rightarrow (A \setminus D \subseteq B \setminus C)$
- (c) $A \subseteq B \Leftrightarrow B = A \cup (B \setminus A)$

18. Wyznaczyć $\bigcup_{i \in I} A_i$ oraz $\bigcap_{i \in I} A_i$, gdy $I = \{0, 1, 2, 3\}$:

- (a) $A_i = [i - 1, i + 2]$
- (b) $A_i = \{-i, 0, i\}$
- (c) $A_i = \mathbb{R} \setminus \{i\}$

19. Wyznaczyć $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ oraz $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$:

- (a) $A_i = [0, \frac{1}{i}]$
- (b) $A_i = [-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}]$
- (c) $\mathbb{R} \setminus [0, 1 + \frac{1}{i}]$
- (d) $\mathbb{R} \setminus [i, \infty)$

20. Wyznaczyć $\bigcup_{i \in \mathbb{R}^+} A_i$ oraz $\bigcap_{i \in \mathbb{R}^+} A_i$:

- (a) $A_i = [-0, \frac{1}{i^2+1}]$
- (b) $A_i = (i, \infty)$
- (c) $A_i = [1, i^2]$

21. Wyznaczyć $\bigcup_{i \in \mathbb{R}^+} A_i$, $\bigcap_{i \in \mathbb{R}^+} A_i$, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ oraz $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$:

- (a) $A_i = \{x \in \mathbb{N} : -i \leq x \leq i\}$
- (b) $A_i = \{x \in \mathbb{R} : -i \leq x \leq i\}$
- (c) $A_i = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \frac{1}{i+1}\}$
- (d) $A_i = \{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{i+1} \leq x \leq \frac{i+1}{i+2}\}$

22. Wyznaczyć $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$:

- (a) $A_i = \{x \in \mathbb{R} : -2 + \frac{1}{n} \leq x \leq 2 - \frac{1}{n}\}$
- (b) $A_i = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + n = 0\}$

23. Wyznaczyć $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$:

- (a) $A_i = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2 - \frac{1}{n}\}$
- (b) $A_i = \{x \in \mathbb{R} : x > n\}$

24. Udowodnić, że dla dowolnych indeksowanych rodzin zbiorów zachodzi:

- (a) $\bigcap_{i \in I} (A_i \cap B_i) = \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{i \in I} B_i$

- (b) $\bigcup_{i \in I} (A_i \cup B_i) = \bigcup_{i \in I} A_i \cup \bigcup_{i \in I} B_i$
 (c) $\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \cap \bigcup_{i \in I} B_i$

25. Wyznaczyć $A \times B$ i $B \times A$:

- (a) $A = \{0, 1\}, B = \{2, 3\}$
 (b) $A = \{\{0\}, 1\}, B = \{1, 2, 3\}$
 (c) $A = \emptyset, B = \{a, b, c, d\}$
 (d) $A = \{\emptyset, 4\}, B = \{1, 2\}$

26. Wyznaczyć zbiór A^2 i określić jego moc:

- (a) $A = \{4, 5\}$
 (b) $A = \{a, b, c, d\}$

27. Niech $|A| = k$. Wyznaczyć A^n .

28. Narysować $A \times B$ oraz $B \times A$:

- (a) $A = (1, 2), B = (0, 1)$
 (b) $A = [-1, 1], B = [0, 1]$
 (c) $A = (0, 1) \cup (2, 3], B = (1, 2] \cap (3, 4]$

29. Niech $|A| = k, |B| = l$. Wyznaczyć $A \times B$ oraz jego moc.

30. Sprawdzić, czy prawdziwe są równości:

- (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 (b) $A \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$
 (c) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$

31. Udowodnić równości:

- (a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
 (b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
 (c) $B \times \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \times A_i)$
 (d) $B \times \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \times A_i)$

32. Uzasadnić, że jeżeli $A \times B = B \times A$, to albo $A = \emptyset$, albo $B = \emptyset$, albo $A = B$.

33. Indeks Jaccarda, służący do mierzenia podobieństwa między zbiorami, zdefiniowany jest następująco:

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}, J(A, B) \in [0, 1].$$

Wykazać, że indeks Jaccarda nie jest metryką.

34. ☞ Niech $X \neq \emptyset$, F oznacza rodzinę skończonych podzbiorów zbioru X , oraz zdefiniowana jest funkcja $d : F \times F \rightarrow [0, \infty)$, $d(A, B) = |A \dot{-} B|$, gdzie A i B są zbiorami. Wykazać, że (X, d) jest przestrzenią metryczną.

References

- [1] Larisa Dobryakova, *Matematyka dyskretna*. Lulu, 2012.
 [2] Helena Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1973.
 [3] Wiktor Marek, Janusz Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1972.
 [4] Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.