

Matematyka dyskretna

Jan Rodziewicz-Bielewicz, Wydział Informatyki ZUT

March 15, 2021

2 Dowodzenie

ZASTOSOWANIE: Dowodzenie poprawności algorytmów.

1. Dla $x, y \in \mathbb{Z}$ udowodnić zdania:

- (a) Jeżeli $x + y$ jest parzysta, to x oraz y mają tę samą parzystość.
- (b) Jeżeli x^2 jest parzysta, to x jest parzysta.

2. Wykazać niewymierność następujących liczb:

- (a) $\sqrt{2}$,
- (b) $\sqrt{3}$,
- (c) $\sqrt{5}$,
- (d) $\sqrt[3]{7}$.

3. Udowodnić twierdzenie o jednoznaczności granicy ciągu liczb rzeczywistych (wskazówka: odwołać się do definicji granicy).

4. Zbadać prawdziwość zdań:

- (a) $x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}$
- (b) $x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \cdot y \notin \mathbb{Q}$ (dla $x \neq 0$)
- (c) $x, y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}$
- (d) $x, y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \cdot y \notin \mathbb{Q}$
- (e) $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q}$
- (f) $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{Q}$

5. Pokazać, że zachodzi:

$$e^x + e^{-x} = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

6. Udowodnić nierówność mediantu dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}.$$

7. Udowodnić nierówność trójkąta dla funkcji część całkowita:

$$[x + y] \geq [x] + [y].$$

8. Udowodnić, że jeżeli $[x] = [y]$, to $|x - y| < 1$.

9. Udowodnić nierówność trójkąta dla liczb rzeczywistych x, y :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

10. Pokazać, że L^1 spełnia wszystkie aksjomaty normy.

11. Wykazać, że L^0 nie jest normą.

12. Wykazać, że $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
13. Wykazać, że $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
14. Wykazać, że $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
15. Wykazać, że $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wskazówka: skorzystać z zadania ??.
16. Wykazać, że $2^n > n$ dla $n \in \mathbb{N}$.
17. Wykazać, że $2^n > n^2$ dla $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$.
18. Wykazać, że $3^n > n \cdot 2^n$ dla $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
19. Udowodnić nierówność Bernoulliego dla liczby rzeczywistej $a > -1$ i $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

20. Wykazać, że $n! \geq 2^n$ dla $n \geq 4$.
21. Wykazać, że $2|n^2 + n$ dla $n \in \mathbb{N}$.
22. Wykazać, że $6|n^3 + 5n$ dla $n \in \mathbb{N}$.
23. Wykazać, że dla n naturalnego parzystego liczba w postaci $n^3 + 20n$ jest podzielna przez 48.
24. Wykazać, że $6|13^n - 7$ dla $n \in \mathbb{N}$.
25. Wykazać, że $9|4^n + 6n - 10$ dla $n \in \mathbb{N}$.

References

- [1] Larisa Dobryakova, *Matematyka dyskretna*. Lulu, 2012.
- [2] Helena Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1973.
- [3] Wiktor Marek, Janusz Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1972.
- [4] Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.
- [5] Grzegorz Szkibieli, Czesław Wowk, *Zadania z arytmetyki szkolnej i teorii liczb*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, 2001.