

Matematyka dyskretna - teoria

Jan Rodziewicz-Bielewicz, Wydział Informatyki ZUT

March 7, 2021

3 Teoria zbiorów

Zbiór to pojęcie pierwotne, a więc takie którego nie definiujemy. Przykładami zbioru mogą być zbiór wszystkich liter polskiego alfabetu czy też zbiór wszystkich książek w bibliotece WI.

Język teorii zbiorów:

- zmienne: $a, b, c, \dots, A, B, C, \dots$
- symbole logiczne: $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- kwantyfikatory: $\forall, \exists$
- symbole: $=$ ("jest równe"), $\in$ ("należy do" lub "jest elementem"), $\subseteq$ ("zawiera się w ")
- nawiasy: $(,), \{, \}$

Zbiory oznaczamy wielkimi literami, a ich elementy małymi.

Przykład

$A = \{a, b\}$. Możemy napisać, że element a należy do tego zbioru: $a \in A$ oraz element c nie należy do zbioru A : $c \notin A$.

Ważne zbiory:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - liczby naturalne, przyjmujemy że 0 nie jest liczbą naturalną
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (liczby naturalne z zerem)
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (liczby całkowite)
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ (liczby wymierne)
- $\mathbb{I}\mathbb{Q}$ (liczby niewymierne)
- $\mathbb{R}$ (liczby rzeczywiste)
- $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ (liczby zespolone)

Definicja 2. Mówimy, że zbiory A i B **są równe**, jeżeli mają te same elementy:

$$A = B \Leftrightarrow \forall_x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

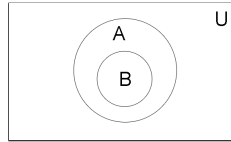
Przykład

$A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 2\}$, $C = \{2, 1\}$. Wówczas $A = B = C$.

Definicja 3. (Relacja inkluzji) Mówimy, że zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B jeżeli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall_x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Czytamy to również "A zawiera się w B", "A inkluduje B", ale NIE "A należy do B"! Można również powiedzieć, że B jest **nadzbiorem** A (ilustracja poniżej, U oznacza uniwersum):



A nie jest podzbiorem B :

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists_x (x \in A \wedge x \notin B)$$

Przykład

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$$

$$B \subseteq A$$

Definicja 4. Zbiór pusty to zbiór nie mający elementów. Oznaczamy go symbolem $\emptyset$.

Przykład

$$\emptyset = \{x \in \mathbb{N} : x < 0\}$$

Definicja 5. Zbiór potęgowy dla zbioru A to zbiór zawierający wszystkie jego podzbiory. Oznaczamy go $P(A)$ lub 2^A .

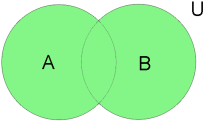
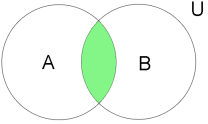
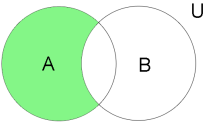
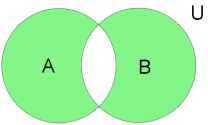
Definicja 6. Mocą (liczbą kardynalną) zbioru skończonego n -elementowego A nazywamy liczbę jego elementów:

$$|A| = n$$

Można również spotkać inne oznaczenie mocy zbioru: $\#A$.

Definicja 7. Dwa zbiory skończone A i B są **równoliczne**, gdy mają tyle samo elementów. Uogólniając: istnieje bijekcja między A i B .

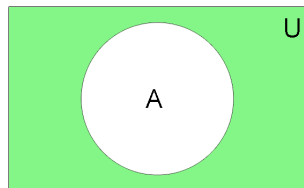
Definicja 8. Działania na zbiorach. Niech A i B będą zbiorami. Definiujemy wówczas działania:

Działanie	Język teorii zbiorów	Język rachunku zdań	Diagram Venna
Suma	$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$	$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$	
Iloczyn (przekrój, część wspólna)	$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$	
Różnica	$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$	$x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$	
Różnica symetryczna	$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	(wynika z powyższych)	

Uwaga Diagram Venna nie stanowi dowodu prawa rachunku zbiorów.

Definicja 9. Dopelnienie zbioru $A \subseteq U$ (U - Uniwersum, cała przestrzeń) to zbiór

$$A^C = \{x \in U : x \notin A\}$$



Innymi słowy, $A^C = U \setminus A = U - A$

Definicja 10. Iloczynem kartezjańskim (produktem) zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych, w których 1. element pochodzi ze zbioru A , a 2. element ze zbioru B :

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Uwaga Dwie pary uporządkowane (a_1, b_1) i (a_2, b_2) są równe gdy $a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$.

Definicja 11. Indeksowaną rodziną zbiorów nazywamy rodzinę postaci

$$\{F(i) : i \in I\}$$

gdzie F jest pewną funkcją o dziedzinie I , której wartościami są zbiory, a I jest tzw. zbiorem indeksów. Zwykle zapisujemy F_i zamiast $F(i)$.

Definicja 12. Suma uogólniona zbiorów A_i to taki zbiór, że element x należy do niego wtedy i tylko wtedy gdy należy do któregośkolwiek ze zbiorów A_i :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists_{i \in I} x \in A_i\}$$

Element x należy do sumy uogólnionej zbiorów A_i , gdy:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists_{i \in I} x \in A_i$$

Definicja 13. Przekrój uogólniona zbiorów A_i to zbiór złożonych z tych elementów x , które należą do wszystkich zbiorów A_i .

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall_{i \in I} x \in A_i\}$$

Element x należy do przekroju uogólnionego zbiorów A_i , gdy:

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall_{i \in I} x \in A_i$$

References

- [1] Larisa Dobryakova, *Matematyka dyskretna*. Lulu, 2012.
- [2] Helena Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1973.
- [3] Wiktor Marek, Janusz Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1972.
- [4] Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.